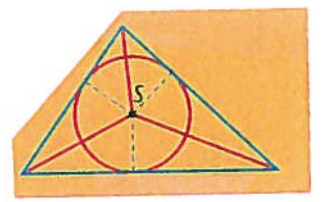
4 VIKTIGE TEOREMER FOR TREKANTER.

Alle disse setningene er inkludert i geometri-avsnittene i $R1$ og går der under fellesbetegnelsen "Skjæringssetningene".

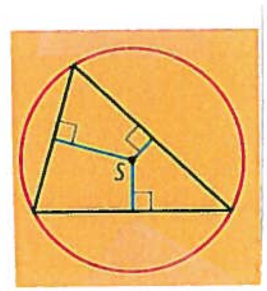
THEOREM A:

Halveringsstrålene for de tre vinklene i en trekant har et felles skjæringspunkt.



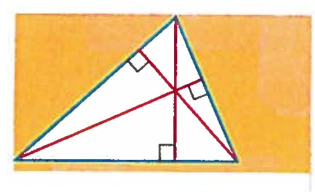
TEOREM B:

Midtnormalene på de tre sidene i en trekant har et felles skjæringspunkt.



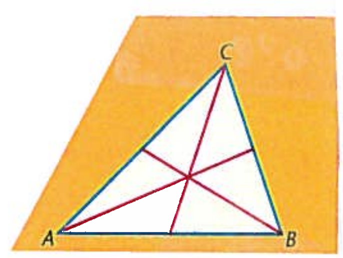
TEOREM C:

De tre høydene i en trekant har et felles skjæringspunkt.



TEOREM D:

De tre medianene i en trekant har et felles skjæringspunkt.



(M, N, O er midtpunkter på de tre sidene og medianene er linjene $\overleftrightarrow{AN}, \overleftrightarrow{BO}$ og $\overleftrightarrow{CM}$).

BEVIS FOR TEOREM A:

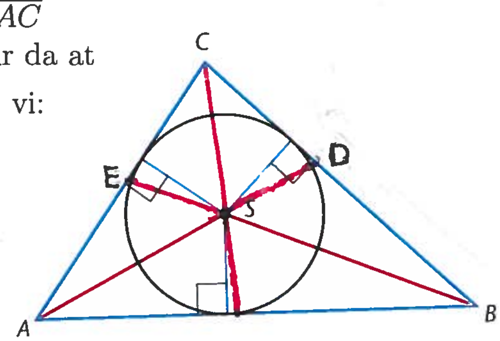
Vi trenger her følgende resultat

TEOREM 4.3.6 (s. 80, VENEMA).

La P være et indre punkt i $\angle BAC$. Da ligger P på vinkelhalveringsstrålen til denne vinkelen hvis og bare hvis

$$d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC}).$$

Vi beviser først at to vinkelhalveringsstråler skjærer hverandre. Siden vinkelhalveringsstråler er indre stråler, følger det fra Crossbar-teoremet at vinkelhalveringsstrålen til $\angle BAC$ skjærer BC i et punkt D s.a. $B * D * C$. Likeledes vil vinkelhalveringsstrålen til $\angle ABC$ skjære $\overline{AC}$ i et punkt E. Crossbar-teoremet anvendt på ΔABE gir da at $\overrightarrow{AD}$ skjærer $\overline{BE}$ i et punkt S s.a. $B * S * E$. Altså har vi:



$$\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{S\}.$$

Ut fra "bare hvis" i teorem 4.3.6 følger:

$$d(S, \overleftrightarrow{AB}) = d(S, \overleftrightarrow{AC}) \text{ og } d(S, \overleftrightarrow{BC}) = d(S, AB)$$

Dette gir: $d(S\ \overleftrightarrow{AC}) = d(S, \overleftrightarrow{BC})$. Fra "hvis" i Teorem 4.3.6 har vi derfor at S ligger på vinkelhalveringsstrålen til $\angle BCA$. $\square$

KOROLLAR:

En sirkel med sentrum i S og radius $r = d(S, \overleftrightarrow{AB}) = d(S, \overleftrightarrow{BC}) = d(S, \overleftrightarrow{CA})$ vil berøre (tangere) de tre sidene i trekanten ΔABC. (Denne sirkel betegnes gjerne som den <u>innskrevne</u> sirkel til trekanten.)

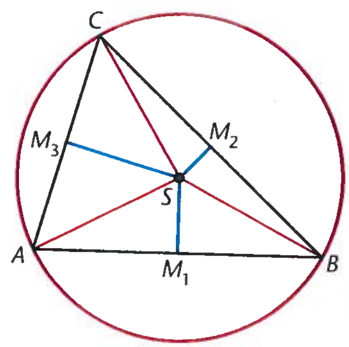
BEVIS FOR TEOREM B:

Vi minner her om

TEOREM 4.3.7 (s. 80, VENEMA)

Hvis $A \neq B$ vil punktet P ligge på midtnormalen av $\overline{AB}$ hvis og bare hvis $PA = PB$.

Vi påstår først at de to midtnormalene l og m på figuren skjærer hverandre i et punkt S.



Dersom $l || m$, følger fra Teorem 5.1.7 (VENEMA, s. 108) at $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$ eller $\overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{BC}$. Men dette er i strid med definisjonen av en trekant. Ut fra "bare hvis" i ovenstående teorem har vi:

$$SA = SB \text{ og } SB = SC$$

og følgelig må $SA = SC$. Ut fra "hvis" følger det da at S ligger på midtnormalen for $\overline{CA}$. $\square$

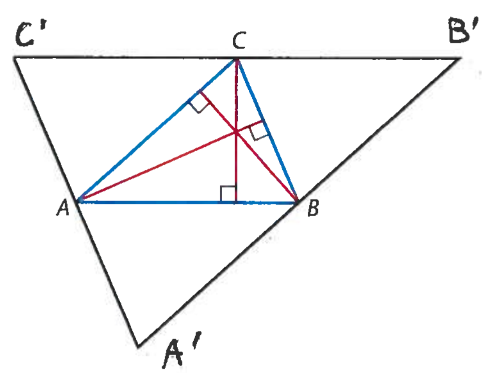
KOROLLAR:

En sirkel med sentrum i S og radius

$$r = SA = SB = SC$$

vil gå gjennom de tre hjørnene i ΔABC. (Denne sirkel kalles den omskrevne sirkel til trekanten.)

BEVIS FOR TEOREM C

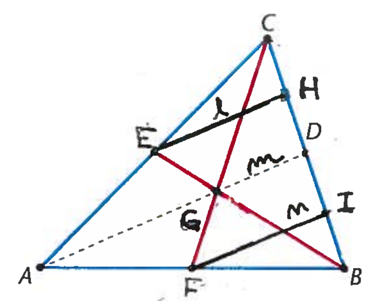


Her trekker vi tre linjer gjennom de tre hjørnene parallelle med motstående side i trekanten. Siden disse linjene ikke kan være parallelle (igjen ut fra Teorem 5.1.7), får vi en ny trekant: $\Delta A'B'C'$. Vi påstår nå at høyden $\overleftrightarrow{CF}$ er midtnormal på siden $\overline{B'C'}$ i den store trekanten. At

$\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{B'C'}$ er klart ut fra det faktum at $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. (Teorem 5.1.6, s. 108). Videre innsees at $CC' = CB'$ siden $C'C = AB$ og $AB = CB'$ ut fra egenskaper ved parallellogramer; (Teorem 5.1.10(2), s. 108). Analogt bevises at $C'A = AA'$ og $A'B = BB'$. Siden midtnormalene på sidene i $\Delta A'B'C'$ har et felles skjæringspunkt i følge Teorem B er påstanden bevist. $\square$

BEVIS FOR TEOREM D:

Siden D er midtpunktet på $\overline{BC}$ vil $B * D * C$, og følgelig er $\overrightarrow{AD}$ en indre stråle i $\angle BAC$. Siden $C \in \overrightarrow{AC}$ og $F \in \overrightarrow{AB}$, må $\overrightarrow{AD}$ skjære $\overline{FC}$ i et indre punkt G i følge Crossbar-teoremet. (Teorem 3.5.2, s. 56). Vi trekker så en linje l gjennom E og en linje n gjennom F s.a. $l||m$ og $n||m$, $m = \overleftrightarrow{AD}$. Ut fra $MAIVT$ (Teorem 4.7.1) blir



$$\Delta CEH \sim \Delta CAD \text{ og } \Delta FBI \sim \Delta ABD.$$

Fundamentalteoremet for formlike trekanter (TEOREM 5.3.1, s. 112) gir da:

$$\frac{CD}{CH} = \frac{CA}{CE} = 2, \quad \frac{BD}{BI} = \frac{BA}{BF} = 2$$

Altså er: $CH = HD = DI = IB$. Siden $l||m$ og $m||n$ følger ved et tilsvarende argument at $CG = 2GF$. Altså deles medianen $\overline{CF}$ av den andre medianen $\overline{AD}$ i forhodet 2:1. Men det samme resultat oppnås om vi studerer skjæringen mellom medianene $\overline{CF}$ og $\overline{BE}$. Altså må G være felles skjæringspunkt for de tre medianene i ΔABC. De deler dessuten hverandre i forholdet 2:1. $\square$

GJELDER TEOREMENE OVENFOR I NØYTRAL GEOMETRI ELLER BARE I EUKLIDSK GEOMETRI?

TEOREM A:

I dette beviset benyttes Teorem 3.5.2 og Teorem 4.3.6 som begge er gyldige innenfor nøytral geometri. Altså er dette et resultat innenfor nøytral geometri.

TEOREM B:

Her benyttes Teorem 5.1.7 som er et resultat innenfor euklidsk geometri. I og for seg utelukker ikke dette at vårt teorem var et resultat som kunne bevises uten å trekke inn Teorem 5.1.7, og da kanskje var et teorem innenfor nøytral geometri. Men vi skal senere i kurset gi et eksempel innenfor hyperbolsk geometri der to midtnormaler ikke skjærer hverandre. Altså er dette et teorem som ikke holder i nøytral geometri.

TEOREMENE C og D.

I tillegg til at Teorem C bygger på Teorem B og dessuten bygger på Teorem 5.1.7 synes det klart at dette er et resultat innenfor euklidsk geometri. Teorem D bygger også i sterk grad på euklidsk geometri.